Е. Л. Авербух, А. А. Куркин, О. Е. Хвостова

Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, Averbukh.lena@gmail.com

ОСОБЕННОСТИ СГЛАЖИВАЮЩИХ ЯДЕР ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ ЧАСТИЦ

Уравнения Навье – Стокса являются базовыми при численном моделировании различных классов задач гидродинамики:

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla P + \mu \cdot \Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{g},$$

где $\boldsymbol{u}$ — вектор скорости, t — время, ρ — плотность потока, P — давление, μ — коэффициент вязкости, $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения. Традиционно задачи движения вязкой жидкости решаются в формулировке функция тока — вихрь. Но при решении многих, в особенности пространственных задач, использование естественных физических переменных может оказаться предпочтительнее. Поэтому задача построения эффективных численных алгоритмов их решения, обладающих достаточной точностью, является актуальной и сегодня.

Особо сложными при моделировании являются процессы, сопровождающиеся сильнонелинейной деформацией при движении, поэтому необходимую точность численного решения таких задач можно получить только в случае расчетной сетки, ячейки которой меньше самого мелкого вихря. Это требует очень больших затрат расчетного времени на современных суперкомпьютерах. Поэтому все большее распространение приобретают бессеточные методы, среди которых можно выделить гидродинамический метод сглаженных частиц (SPH). Основная его идея состоит в дискретизации сплошной среды конечным набором лагранжевых частиц, которые движутся со скоростью потока и допускают произвольную связность между собой, что позволяет отказаться от использования сеток. Частицы обладают всеми характеристиками среды: координатами, скоростью, массой, плотностью, давлением и энергией.

Все функции, входящие в систему уравнений движения, например, плотность, представляются в виде конечной суммы по частицам соседним к аппроксимируемой,

$$A(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\rho_i} A_i W(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_i}, h), \qquad (1)$$

где A — искомая функция, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, m_i, ρ_i — масса и плотность i-й частицы соответственно, n — количество соседних с ней частиц, а $W(\boldsymbol{r}, h)$ — функция сглаживающего ядра. Величина h является носителем функции ядра. Она определяет радиус взаимодействия между частицами и называется сглаживающей длиной. Для частиц вне радиуса взаимодействия функция ядра равна нулю.

Преобразуем градиент искомой функции (лапласиан — аналогично). Из (1) следует, что они получаются путем прямого дифференцирования функции ядра:

$$\nabla A(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\rho_i} A_i \nabla W(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_i}, h).$$

Остановимся теперь подробнее на представлении сглаживающего ядра. Использование различных ядер аналогично использованию различных разностных схем при моделировании методом конечных разностей. Важность проблемы выбора сглаживающего ядра высока, так как влияет на оценку эффективности метода решения поставленной задачи. Первое золотое правило: для лучшей физической интерпретации метода сглаженных частиц лучше всего применять ядро Гаусса

$$W_{gaussian}(\boldsymbol{r}, h) = \frac{1}{(2\pi h^2)^{3/2}} \exp[-(|\boldsymbol{r}|^2 / 2h^2)]. \qquad (2)$$

Несмотря на то, что ядро (2) имеет очень хорошие физические и математические свойства, оно не всегда является лучшим ядром. При использовании экспоненциальной функции будут увеличиваться время моделирования и усложняться алгоритм. Поэтому будем использовать полиномиальное ядро 6-й степени:

$$W_{def}(\boldsymbol{r}, h) = \frac{315}{64\pi h^9}(h^2 - |\boldsymbol{r}|^2)^3,$$

$$\nabla W_{def}(\boldsymbol{r}, h) = \frac{-945}{32\pi h^9}\boldsymbol{r}(h^2 - |\boldsymbol{r}|^2)^2, \qquad (3)$$

$$\triangle W_{def}(\boldsymbol{r}, h) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}|^2}(|\boldsymbol{r}|^2 \nabla W_{def})'_{\boldsymbol{r}} = \frac{-945}{32\pi h^9}(h^2 - |\boldsymbol{r}|^2)(3h^2 - 7|\boldsymbol{r}|^2).$$

Составляющая сила давления имеет вид

$$F^{press}_{j, j\neq i} = -\rho_j \sum_i \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho^2}\right) m_i \nabla W_{press}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i, h),$$

и отвечает за притяжение и отталкивание взаимодействующих частиц. Если в качестве ядра использовать (3), то в районах высокого давления частицы будут собираться в группы. При этом необходимо, чтобы при уменьшении расстояния между частицами они начинали отталкиваться друг от друга, а при увеличении — притягиваться. Выполнение этого условия влечет за собой необходимость использования сглаживающего ядра для составляющей силы давления следующего вида:

$$W_{press}(\boldsymbol{r}, h) = \frac{15}{\pi h^6}(h - |\boldsymbol{r}|)^3,$$

$$\nabla W_{press}(\boldsymbol{r}, h) = \frac{-45}{\pi h^6} \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}, (h - |\boldsymbol{r}|)^2,$$

$$\Delta W_{press}(\boldsymbol{r}, h) = \frac{-90}{\pi h^6} \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} (h - |\boldsymbol{r}|)(h - 2|\boldsymbol{r}|).$$

Необходимо отметить, что разрывность оператора ∇ от ядра давления в нуле необходима в том случае, когда частицы располагаются очень близко друг от друга.

Остановимся далее на составляющей силы вязкости:

$$F^{vis}_{j, j \neq i} = \mu \sum_i (\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j) \frac{m_i}{\rho_i} \Delta W_{vis}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i, h).$$

Она играет роль сопротивления потоку частиц, уменьшая тем самым скорость движения среды. Это влечет за собой необходимость иметь положительное значение для оператора Лапласа от функции ядра. Однако стандартное ядро не обладает этим свойством, поэтому мы используем сглаживающее ядро с положительным лапласианом внутри радиуса взаимодействия следующего вида:

$$W_{vis}(\boldsymbol{r}, h) = \frac{15}{2\pi h^3} \left(-\frac{|\boldsymbol{r}|^3}{2h^3} + \frac{|\boldsymbol{r}|^2}{h^2} + \frac{h}{2|\boldsymbol{r}|} - 1 \right),$$

$$\nabla W_{vis}(\boldsymbol{r}, h) = \frac{15}{2\pi h^3} \boldsymbol{r} \left(-\frac{3|\boldsymbol{r}|}{2h^3} + \frac{2}{h^2} - \frac{h}{2|\boldsymbol{r}|^3} \right),$$

$$\Delta W_{vis}(\boldsymbol{r}, h) = \frac{45}{\pi h^6} (h - |\boldsymbol{r}|).$$

Итак, в настоящей работе представлены особенности выбора сглаживающих ядер для гидродинамического метода сглаженных частиц. Данный метод лежит в основе разработанного авторами программного комплекса для моделирования движения жидкости со свободной поверхностью. Модель в настоящее время прошла стадию тестирования и применяется для решения широкого круга задач гидродинамики.

Представленные результаты поисковой научно-исследовательской работы получены в рамках реализации мероприятия 1.2.1 "Проведение научных исследований научными группами под руководством докторов наук" ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 годы.

Ю. Р. Агачев, С. М. Ахметов, И. Н. Тихонов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

Нижнекамский химико-технологический институт,

jagachev@ksu.ru, tin.ksu@yandex.ru

О НЕРАВЕНСТВАХ, СВЯЗЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЮ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫЕ В СПЕЦИАЛЬНЫХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Пусть r — произвольно зафиксированное натуральное число, $\rho = \rho(t) = \sqrt{1-t^2}$ — вес Чебышева второго рода, $q = q(t) = [\rho(t)]^{4r-3}$. Отметим, что функция $q(t)$ является частным случаем хорошо известного веса Якоби. Обозначим через $L_{2,q} \equiv L_{2,q}(-1,1)$ пространство функций, квадратично суммируемых на интервале $(-1,1)$ с весом $q(t)$. В этом пространстве норму определим обычным образом

$$\|f\|_{2,q} \equiv \|f\|_{L_{2,q}} = \left\{ \int_{-1}^{+1} q(t)|f(t)|^2 dt \right\}^{1/2}, \quad f \in L_{2,q}.$$

Функции из пространства $L_{2,q}$ квадратично суммируемы на любом отрезке, целиком вложенном в интервал $(-1,1)$, и при $r \geqslant 1$ имеют, вообще говоря, особенности на концах промежутка $[-1,1]$ порядка ниже $r - 1/4$. Это означает, что функции из